问题驱动与几何直观融合的高等代数教学改革与实践

——以三个核心概念教学案例为例

胡雅蓉　胡运红

运城学院 山西 运城 044000

【摘　要】：高等代数的抽象性是制约教学质量提升的关键瓶颈。为破解这一难题，本文构建了“问题驱动”与“几何直观”深度融合的教学模式，并选取“线性空间的定义”、“线性变换的矩阵表示”及“特征值与特征向量”三个典型难点概念，设计了具体教学案例。实践表明，该模式通过创设“问题链”引导知识再发现，利用几何直观与动态演示搭建理解，能有效激发学生探究动机，促进其从感性认知向理性抽象的自然跨越，显著深化对代数本质的理解。

【关键词】：高等代数；问题驱动；几何直观；教学案例；线性变换

DOI:10.12417/2705-1358.26.01.023

1 引言与问题提出

高等代数是数学类专业的基础核心课程，其思想与方法构成了现代数学的基石。然而，该课程的教学长期面临“高投入、低产出”的困境：学生往往能够熟练进行矩阵、行列式计算，却对线性空间、线性变换、特征理论等核心概念的几何背景与内在联系茫然无知。这种“知其然不知其所以然”的状态，根源在于传统“定义-定理-证明-例题”的线性教学模式。这种模式将高度浓缩、公理化的数学结论直接呈现给学生，割裂了知识的发生与发展过程，导致学生只能进行浅层的、机械的记忆与模仿，无法形成深刻的、可迁移的数学思维。

“线性空间”是公理化思维的起点，“线性变换的矩阵表示”是连接抽象与具体的桥梁，“特征值与特征向量”则是剖析变换内在结构的钥匙。这三个概念承上启下，构成了高等代数知识体系的主干。因此，革新这三个概念的教学方法，对于打通学生的“任督二脉”，提升整个课程的学习效能，具有至关重要的意义。

针对上述问题，近年来教育界普遍倡导“问题驱动”与“几何直观”的教学理念。问题驱动教学法旨在通过精心设计的问题序列，再现数学概念的创造过程，变被动接受为主动建构[1]。几何直观则强调利用图形、图像和动态演示，为抽象概念提供具象支撑，降低认知负荷，启发逻辑证明思路[2]。然而，现有研究多为理念探讨，缺乏针对具体知识点的、可操作性强的典型案例。为此，本文将上述理念系统整合，并聚焦于上述三个核心概念，设计出详细的教学案例，旨在为一线教学提供可直接借鉴的范本，并通过教学实践验证其有效性。

2 教学理念与模式框架

本文的教学改革基于建构主义学习理论，其核心是：知识的获取并非信息的被动传递，而是学习者在原有经验基础上，通过与环境的互动主动建构的意义的过程。基于此，我们构建了“两翼一体”的教学模式框架：

一翼是“问题驱动”：作为课堂教学的“引擎”。教师不再是知识的宣读者，而是问题的设计者与探究的引导者。通过创设具有启发性、层次性的“问题链”，制造学生的认知冲突，激发其求知欲，引导其沿着数学家的思考路径进行探索和“再发现”。另一翼是“几何直观”：作为理解抽象概念的“脚手架”。充分利用二维、三维空间的几何原型，并借助 Phython、MATLAB 等现代信息技术工具进行动态可视化，将抽象的代数关系转化为直观的图形变化，帮助学生形成“心理表象”，为严格的逻辑推理提供直觉基础和猜想来源。

一体是指学生的“思维建构”主体。上述两翼共同服务于学生这一认知主体，最终目标是帮助其顺利完成从具体实例到公理体系、从算法操作到概念本质、从直观感知到逻辑演绎的思维升华。

3 核心概念教学案例设计与实践

案例一：“线性空间”公理化定义的教学——从“共性”中凝练“本质”

作者简介：胡雅蓉 出生年月：1986.12　性别：女　民族：汉　学历：博士　籍贯：山西运城　职称：讲师　研究专业方向：代数图论

基金项目：山西省高等学校教学改革创新项目（J20241293），运城学院博士科研启动项目（YXBQ-202507），数据挖掘与工业智能应用科研创新团队资助项目（YCXYTD-202402）

1.教学目标：理解公理化方法的精神实质，懂得线性空间定义是对众多数学对象共同运算结构的抽象。

2.教学过程：

【创设情境】教师并行列出三组对象：二维实向量 R^2、所有 2×2 实矩阵 $M_{2\times 2}(R)$、区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数 $C[a,b]$。

【问题驱动】

问题 1（运算感知）：这三组对象，能否各自定义“加法”和“数乘”运算？请具体说明。[引导学生回顾向量的线性运算、矩阵的线性运算、函数的 $(f+g)(x)$ 与 $(kf)(x)$]。

问题 2（规律探寻）：请分组讨论，这些看似不同的运算，共同遵守哪些最基本的运算律？[学生通过讨论，通常能归纳出交换律、结合律、分配律、零元存在性、负元存在性等八条规律]。

问题 3（结构发现）：元素（点、矩阵、函数）天差地别，但运算规律却完全一致。这揭示了什么？[引导学生感悟：我们可以超越具体元素，只研究这个共同的“运算结构”]。

问题 4（定义升华）：如果我们把这个拥有加法和数乘两种运算，并满足八条公理的数学结构本身定义为一类新的数学对象，应如何命名？[自然引出“线性空间”的定义]。

3.设计意图与价值：本案例彻底摒弃了直接罗列八条公理的灌输式教法。通过问题链，学生亲身经历了从具体到抽象的“数学抽象”全过程。他们不仅记住了定义，更深刻地理解了公理化的必要性与优越性——即通过提炼共性，实现“以一当百”的理论普适性。

案例二：“线性变换的矩阵表示”的教学——为“变换”制作“身份证”

1.教学目标：深刻理解矩阵是线性变换在选定基下的坐标表示，掌握矩阵表示的推导方法。

2.教学过程：

【创设情境】利用 Python 动态演示一个平面线性变换（如旋转 30°），并高亮显示标准基向量 $e_1=(1,0)^T$ 和 $e_2=(0,1)^T$ 及其变换后的向量 e_1' 和 e_2'，如图 1。

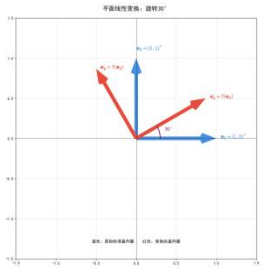

图 1 平面旋转 30° 的线性变换

【问题驱动】

问题 1（定性观察）：这个变换有哪些特性？[引导说出“直线变直线”、“原点不动”等线性变换特征]。

问题 2（关键追踪）：如果我们知道了 e_1' 和 e_2'，能否确定任意向量 $v=(x,y)^T$ 的像 v'？[引导学生利用线性性质推导：$v'=T(xe_1+ye_2)=xT(e_1)+yT(e_2)=xe_1'+ye_2'$]。

问题 3（矩阵浮现）：将 e_1' 和 e_2' 作为列向量拼成一个矩阵 $A=[e_1'\,|\,e_2']$。上面的式子 $v'=xe_1'+ye_2'$ 可写成何种简洁形式？[学生立刻得出 $v'=Av$]。

问题 4（一般化结论）：此结论是特例吗？对于任意 n 维空间 V 上的线性变换 T，只要选定 V 的一组基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}$，并记录下 $T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),\ldots,T(\varepsilon_n)$ 在 V 的这组基下的坐标，就能唯一确定一个矩阵 A，使得坐标计算满足 $T(v)=Av$。矩阵 A 被称为？[引出“变换矩阵”的定义]。

3.设计意图与价值：本案例通过动态可视化和环环相扣的问题，让学生亲眼目睹并亲手推导出矩阵表示定理。基向量的“命运”是可视化的焦点，它直观地揭示了“矩阵的列就是基向量的像”这一核心。这使学生理解到，矩阵不是凭空出现的，它是线性变换在坐标下的具体“身份证”，完美地连接了抽象的变换与具体的计算。

案例三：“特征值与特征向量”的教学——探寻“变换中的不变性”

1.教学目标：理解特征值与特征向量的几何本质，掌握其求解方法，并领会其在简化变换中的价值。

2.教学过程：

【创设情境】：在 Python 中展示一个矩阵 A（如 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$）

确定的线性变换。在变换前，在平面上绘制一簇从原点出发的向量，如图 2。

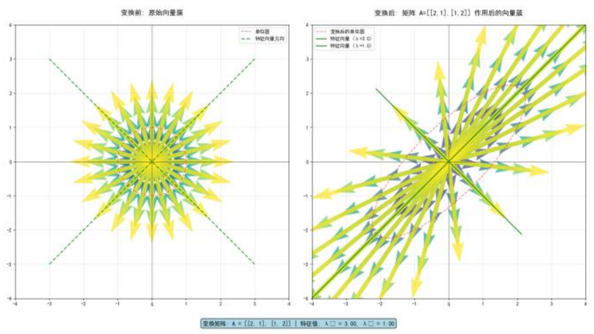

图 2 矩阵 A 确定的线性变换

【问题驱动】

问题 1（直观发现）：仔细观察，在变换过程中，是否存在一些向量，其方向保持不变？（只有伸长或缩短，或反向）。请尝试用鼠标标出这些“特殊”的向量（如图 3）。

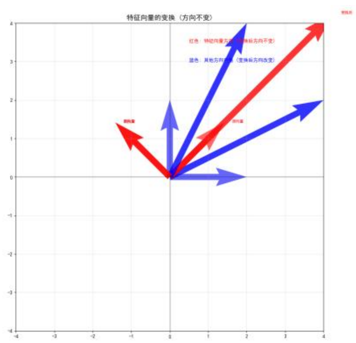

图 3 特征向量

问题 2（定量描述）：对于你找到的向量 ξ，变换后 $T(\xi)$ 与 ξ 有什么关系？（得出 $T(\xi)=\lambda\xi$ ）。这里的 ξ 和 λ 在数学上称为什么？[引出特征向量与特征值的定义]。

问题 3（方程建立）：将 $T(\xi)=\lambda\xi$ 用矩阵方程表示 $A\xi=\lambda\xi$，并变形为 $(A-\lambda E)\xi=0$。这是一个关于 ξ 的齐次线性方程组，存在非零解的条件是什么？[引出特征方程 $|A-\lambda E|=0$]。

问题 4（意义升华）：如果我们把坐标系建在这些特征向量的方向上，这个线性变换会呈现出怎样简单的形式？[引导学生思考，在新的基下，变换矩阵是对角阵，变换被简化为沿坐标轴的纯伸缩。此为矩阵对角化思想的几何雏形]。

3.设计意图与价值：本案例彻底逆转了“定义-方程-求解-举例”的传统顺序。学生是先看到“方向不变的向量”这一震撼的几何现象，然后才去探寻其代数定义与求法。这使得特征值/向量从一个抽象的代数概念，转变为一个清晰的、有强烈几何直观的数学对象，为后续理解矩阵对角化、动力系统、主成分分析等高级应用奠定了坚实的直觉基础。

4 结论

高等代数的教学，理应是一场引导学生重走探索之旅、领略数学结构之美的智力冒险。本文针对三个核心概念所设计的教学案例，系统践行了“问题驱动”与“几何直观”相融合的教学理念。实践证明，通过创设问题情境引领探究方向，利用几何直观搭建理解阶梯，能够有效地化解高等代数的抽象性带来的教学难点，帮助学生不仅“知其然”，更“知其所以然”，最终实现数学核心素养的实质性提升。这三个案例所形成的教学范式，对高等代数乃至其他抽象数学课程的教学改革，都具有普遍的参考与推广价值。

参考文献：

[1] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2016.

[2] 徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中科技大学出版社,2000.

[3] 吉尔伯特・斯特朗.线性代数及其应用[M].北京:机械工业出版社,2020.

[4] 曹才翰,章建跃.数学教育心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2017.

[5] 王萼芳,石生明.高等代数（第五版）[M].北京:高等教育出版社,2019.

[6] 廖山涛,刘木兰.从几何观点看线性代数[J].数学通报,2022,61(8):1-5.