

《勾股定理》教学设计分析

王传利¹ 黄锡辉² 黄丽娟³ 林婷婷³ 杨文轩³

1.肇庆学院 数学与统计学院 广东 肇庆 526061

2.肇庆宣卿中学 广东 肇庆 526070

3.肇庆市颂德学校 广东 肇庆 526000

【摘要】：本文聚焦优秀勾股定理教学设计，系统分析其导入环节、新授环节、验证环节及信息技术使用情况，重点围绕毕达哥拉斯发现到探究环节的过渡衔接、小方格纸与三个正方形探究的表述方式、探究教学环节的连贯性与学生学习思维的适配性，以及验证方法的设计等核心问题展开深入讨论与分析，以期为《勾股定理》的教学提供技术支持。

【关键词】：思维；教学设计；勾股定理；教学理念

DOI:10.12417/2705-1358.26.03.063

1 引言

勾股定理是初中数学的重点内容，兼具丰富的数学史、深厚的文化内涵和多种不同的数学思想方法，深受专家、学者、一线教师的关注。然而，部分一线教师依赖教学经验进行教学设计，教学设计缺乏可操作性，教学效果不明显而且难以顺应学生的学习思维^[1]。同时，《义务教育数学课程标准（2022年版）》对数学定理教学提出新的要求，强调关注数学命题证明的必要性、基本过程和基本方法，注重培养学生的数学素养与能力^[2]。

为整合出更顺应学生思维的教学设计，本研究选取51篇不同年份、不同类型且具代表性的教学设计，对其导入、新授、验证环节及信息技术应用情况进行系统分析，针对关键问题优化处理，形成优化方案。

2 勾股定理的教学现状分析

2.1 勾股定理的导入环节分析

义务教育实施以后，“勾股定理”的编排发生显著变化，教学目标从了解勾股定理的证明思路、掌握其证明方法再到教学中要求渗透有关的数学思想方法，要求让学生在中学在做中学^[3]。勾股定理的教学设计导入方式多样，本质可归为六类：

(1) 利用国际数学家大会会徽的图案引入。通过观察图案，

引起学生学习兴趣（10个）；（2）利用数学史引入。具体方式有：师生谈话、图片展示、讲述与勾股定理有关的逸闻趣事等（16个）；（3）旧知引入。回忆直角三角形的相关知识，抛出问题：已知直角三角形两边如何求第三边（7个）；（4）用实际生活背景来创设问题情境。问题主要有以下几类：大树折断后倒下形成一个直角三角形，求大树原来高度；长方体木块推倒过程；消防员架梯子救火问题；长方形木板能否从门框内通过（11个）；（5）毕达哥拉斯发现勾股定理的传说（5个）；（6）剪纸、拼图活动（2个）。

使用较多的导入方式是数学史导入（31%），其优势在于契合新课改提出的对学生情感态度价值观的培养，激发学生的学习情趣；国际数学家大会会徽的图案导入（20%）可回归课本，让学生立刻明白老师这节课要讲什么内容；实际生活情境导入（21%）能紧密联结数学与现实，使学生产生心理“缺口”，激发学生学习的动力。以旧知识或者以毕达哥拉斯发现勾股定理的传说的方式，这两种方式分别占总体的14%和10%；第6种以剪纸或拼图活动进行导入的有2篇，占4%。旧知引入是传统教材常用方式，通过复习直角三角形知识、让学生绘制边长为3、4、5的直角三角形并测量数据得出猜想，至今仍有教师根据学生情况采用；毕达哥拉斯发现勾股定理的传说是新人教版教材上第十七章第1节的内容，教材编排内容目的是以故事引起学生的学习兴趣。在教材分析的过程中，研究者认为这则

作者简介：王传利(1975-12)，男，汉族，山东邹城人，硕士研究生，副教授，研究方向：数学教育与数学史、数学课程与教学。

黄锡辉(1985-)，男，汉族，广东德庆人，肇庆宣卿中学数学高级教师，研究方向：数学教育。

黄丽娟(1987-)，女，汉族，广东普宁人，肇庆市颂德学校中学数学一级教师，研究方向：数学教育。

林婷婷(1987-)，女，汉族，广东潮州人，肇庆市颂德学校中学数学一级教师，研究方向：数学教育。

杨文轩(1986-)，男，汉族，广东肇庆人，肇庆市颂德学校中学数学一级教师，研究方向：数学教育。

基金项目：1.广东省教育厅广东省新师范建设助推基础教育高质量发展研究与实践项目《“一体四翼”协同促进肇庆市中小小学数学教师专业发展研究》；2.2024年广东省教育科学规划课题(高等教育专项)，人工智能视域下地方本科院校职前教师TPACK在地化培养研究-以肇庆学院数学师范生为例(项目编号2024GXJK252)。

故事能起承上启下的作用，直接开门见山地引入显得有些唐突。

2.2 勾股定理的新授环节分析

对于新知识的讲授，不同的执教者对内容的处理不同，采取的方式基本分为三类：（1）由毕达哥拉斯的地砖图到方格纸上探究（34 篇）；（2）由毕达哥拉斯的地砖图到动手画一般的直角三角形（8 篇）；（3）利用几何画板软件来进行探究（9 篇）。

方式一所占比例最多，占总体的 34.67%，这符合教科书编写的顺序：教材首先给出毕达哥拉斯所发现的地面图案，通过思考图案中三个正方形面积从而得出特殊直角三角形三边的数量关系，再借用方格纸进一步探究一般直角三角形的情况。这个环节里蕴涵着一些重要的数学思想方法：由等腰直角三角形到一般直角三角形，这是特殊到一般的数学思想；由勾股定理公式 $a^2 + b^2 = c^2$ 本身可以联想到正方形的面积公式，这与先探究等腰直角三角形三边所作的三个正方形面积的关系相吻合。当然，也可以考虑三个半圆的面积关系，但出示地面图案直接引导学生观察得出等腰直角三角形三边的数量关系更好。

在探究一般直角三角形情况中，执教者一般都是借用方格纸来计算正方形面积，但细节上略有不同：一种是先任意画一个直角三角形，并以它的三边作出三个正方形，为了方便学生计算出正方形的面积，执教者把三个正方形的面积分割成若干个面积单位为 1 的小方格，然后通过计算，分析从而易于得出猜想^[4]。一种是借助了小方格纸来画直角三角形并作出三个正方形，然后由三个正方形的面积关系推出直角三角形的三边关系。因此求正方形 C 的面积是本节课的一个难点之一，要求教师在教学中渗透化归思想，引导学生学会将复杂问题简单化，在求正方形 C 的面积时要用到“割补”法。

无论哪一种方法，其实都能体现执教者在教学中利用面积关系入手探究的优越性，但是在大多数教学设计中，并没有提及到为什么要利用小方纸进行探究这个细节。这恰是学生容易产生困惑的地方，需要我们数学教师帮助学生实现由“地板砖”到“方格纸”的过渡。可以先让学生经历“任意画一个直角三角形然后测量，测量出来的数据存在误差”，教师引导学生“想想毕达哥拉斯的发现，由地面砖得出图案，同时能得出三个正方形的面积关系，然后才推出等腰直角三角形的三边关系，那么类似地，能否借助工具帮助我们探究呢？”通过语言引导，再借助动画演示由地面砖演变成小方格的过程，让学生理解探究过程。

第 2 种方案，由毕达哥拉斯的地砖图到动手画一般的直角三角形，通过测量和比较得出猜想有 8 篇，占 8.16%；其方式是先向学生介绍毕达哥拉斯的发现进入学习，然后教师再引导

学生动手画一画去探究一般的直角三角形三边的关系。在特殊到一般的推理过程中，如果得出了特殊情况中的规律，则要引导学生进一步探究一般的情况，学生的惯性思维是任意画一个直角三角形然后用尺子测量来进行推理，但是由于测量的结果有误差，所以这样的做法是不能令人信服的。第 3 种则是利用几何画板软件来进行探究也是异曲同工，虽然说利用信息技术进行教学有利于激发学生的学习兴趣，但研究者认为把几何画板用在验证环节更合理。

2.3 勾股定理的验证环节分析

探究得出猜想后，验证是核心环节。除部分活动课外，教师普遍采用面积验证法。主要通过拼图活动开展，常用的验证方法有 4 种：利用 4 个全等直角三角形拼图（22 篇）；（2）赵爽的验证方法（17 篇）；（3）总统验证方法（8 篇）；（4）利用几何画板验证（4 篇）。

多数执教者使用第一种验证方法。利用四个全等的直角三角形（注意不能是等腰直角三角形）拼成至少含有一个正方形的方法，其在教学设计中出现 22 次，占 43%；教材中并没有给出这种验证方法，而在 2013 年新版教材中章节后面的阅读与思考才有出现。然而，教师要适当对教材内容去加工改造或者补充，这样才能增加教材的实用性^[5]，增加这个环节恰好能开拓学生思维承接下面学习赵爽弦图。

赵爽的验证方法，也是教材中要求掌握的验证方法——面积法。主要通过切割、拼接，根据变化前后面积不变的原理得证，其在教学设计中出现 17 次，占 33%；伽菲尔德的证法，也称为总统证法，在教学设计中出现 8 次，占 16%。勾股定理的证法可以有很多个，国外有关专著收集近 400 种证法。我国传统的证法是用出入相补原理来证明勾股定理，与教材中介绍的赵爽证法如出一辙。有的教师在教学中只呈现同一类的证法，如等面积法，虽然有拼、割、剪等动手活动，但是验证方法略显单一。

个别探究类数学课整堂课以一个问题情境展开探索，其形式不同但依据的原理相同。如下图（图 1），展示竖直的长方体木块推倒过程，并让学生探讨一系列问题，最后得出数量关系式： $S_{梯ABD'A'} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AA'C} + S_{\triangle A'CD'}$ ，这种证法类似于总统证法^[6]，但研究者认为这种教学活动有些理想化而且难度比较大，要根据学生的实际情况有所取舍。

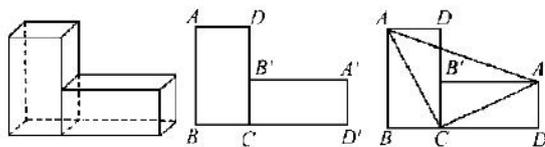


图 1 木块被推倒的过程

2.4 信息技术的运用与教学模式的使用情况

所选 51 篇教学设计中只有 2 篇没有涉及多媒体应用: 1 篇采用剪纸活动的教学模式, 整堂课是以剪纸、拼图为主导线; 1 篇则是创设生活问题情境, 以木块被推倒的过程作为情境, 问题串为线索引导观察、证明勾股定理。其余 49 篇均不同程度使用了多媒体, 计算机或几何画板。其中, 制作动画激发兴趣, 突破难点的有 10 篇, 占 20%; 利用投影仪展示学生拼图成果的有 15 篇, 占 31%; 利用几何画板进行新知探索或证明的共有 24 篇, 占 49%。值得注意的是, 多数执教者是利用几何画板探索新知, 目的是避免在测量过程中出现的误差。

勾股定理的教学本是命题教学, 因此多数数学执教者都是采用探究式教学模式, 但笔者认为, 在教学过程中可以利用多种教学模式进行教学, 毕竟学习了定理公式后仍是要掌握其应用。

3 结语

总的来说, 由课堂的导入到勾股定理的探索与证明, 不同执教者的教学设计各有千秋。通过对比分析发现, 这些教学个案要么是追求展示《标准》所倡导的“情景—探索—交流—总结”的模式, 要么是依据“教学应结合具体的数学内容采用‘问题情境—建立模型—解释、应用与拓展’”的模式展开, 无论是哪一种, 只要所设计的教案能够适应学生, 才能成就高效完美的课堂。

综合所有的教学设计, 研究者认为有以下几点问题需要注

意:

(1) 数学史和勾股定理的趣事导入占时较多。数学史作为课堂导入固然能引起学生的关注, 但无论是有关勾股定理的逸闻趣事还是勾股定理的证明都可以通过网络搜索, 如果把把这些作为课前预习的任务交给学生, 让学生先进行有效先学, 不仅更能体现学生的主体地位, 发挥学生的主观能动性, 也增添了课堂的有效性。

(2) 新授环节细节缺失、思路模糊。未妥善处理“毕达哥拉斯发现到方格纸探究的过渡”“方格纸探究的合理性解释”等细节, 导致学生难以理解探究逻辑; 部分设计简化特殊到一般的推理过程, 缺乏数学思想方法的明确渗透, 不利于学生探索能力的培养。在实际教学中, 利用特殊到一般的数学思想, 可以辅助学生获得探究思路; 在证明的过程中借助化归思想, 学生可以明晰“斜正方形面积的”求法^[7]。

(3) 验证方法单一。多数教学设计集中于传统拼图验证, 但对于为何要采用拼图验证没有给出合理的解释。学习本节课前学生接触的代数证明是严格的演绎三段论, 这节课为何采用拼图法显然是学生不理解的地方。利用探究思路顺势用 4 个全等的直角三角形拼图要比直接采用赵爽弦图证明更能激发学生的思考。几何画板等现代信息技术的验证应用不足, 难以满足学生多样化的认知需求, 也未能充分体现新课程标准对信息技术与学科融合的要求。多数教师虽然采用了信息技术验证, 但没有告诉学生“几何画板验证, 无数个代替不了全部, 还需借助严密的数学证明”, 逻辑推理的严谨性缺失。

参考文献:

- [1] 冯钰洋.HPM 视角下拉萨市初中情景教学的应用研究[D].西藏大学,2023.
- [2] 教育部基础教育课程教材发展中心,义务教育数学课程标准(2022 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:215-218.
- [3] 张冬莉.中国数学教科书中勾股定理内容设置变迁研究(1902-1949)[D].内蒙古师范大学,2020.
- [4] 姚山雪,李红梅.MPCK 视角下的“勾股定理”教学案例分析[J].数学教学通讯,2024,(05):31-34.
- [5] 刘晓薇.核心素养视域下的初中数学大单元教学设计研究[D].伊犁师范大学,2024.
- [6] 陈伟华,黄贤明.发展学生数学核心素养的定理教学实践研究——以“勾股定理的逆定理”为例[J].数学通报,2024,63(01):28-32.
- [7] 王传利,对教科书细节的研读与思考例析——以勾股定理为例[J].肇庆学院学报,2016,37(2):22-29.